Université IBN TOFAÏL
Ecole Nationale
Des Sciences Appliquées
Département
De Mathématique
-Kénitra-

Semestre 3
Fontions de Plusieurs Variables
Automne 2018
Série N°1
Pr. Ch. Bensouda

Exercice 1:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

1- Montrer que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \ ; \ x, y \in E.$$

2- Montrer que l'application définie sur $(E \times E)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donnée par

$$d(x, y) = \|x - y\| \ ; \ (x, y) \in (E \times E)$$

est une distance sur E.

3- Montrer que toute boule ouverte de E est une partie ouverte de E.

4- Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de E reste ouverte dans E.

5- Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de E reste ouverte dans E.

****

Exercice 2:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute partie

$$A \subset E \text{ on pose } \partial A = \overline{A} \backslash A^o.$$

1- Soit $A \subset E$, montrer que $x \in A^o$ si et seulement si, A est un voisinage de x.

2- Soit $A \subset E$, montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si, tout voisinage de x rencontre A.

3- Soit $A \subset E$, montrer que $E \backslash \overline{A} = (E \backslash A)^o$ et que $\overline{E \backslash A} = E \backslash A^o$.

4- Soient $A, B \subset E$.

i- Montrer que

$$A^o \cap B^o = (A \cap B)^o \text{ et } \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

A-t-on l'égalité?

ii- Montrer que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$$

A-t-on l'égalité?

5- Donner des exemples de parties $A \subset \mathbb{R}^n$ et déterminer leurs inférieurs A^o, fermetures $\overline{A}$ et frontières $\partial A = \overline{A} \backslash A^o$.

****

Exercice 3:

1- Montrer que les trois applications p_1, p_2 et p_∞ définissent trois normes sur $\mathbb{K}^n$ et vérifier les inégalités suivantes:

$$p_\infty(x) \leq p_2(x) \leq p_1(x) \leq np_\infty(x) \ ; \ x \in \mathbb{K}^n.$$

2- Montrer que les trois applications d_1, d_2 et d_3 sont trois distances associées aux trois normes p_1, p_2 et p_∞.

3- Montrer que toute boule ouverte pour une de ces trois distances reste une partie ouverte pour les deux autres.

4- En déduire que tout ouvert pour une de ces trois distances reste une partie ouverte pour les deux autres.

5- Conclure que sur $\mathbb{R}^n$, toutes ces normes définissent la même topologie.

****

Exercice 4:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

1 - Montrer que la fermeture d'une partie relativement compacte de E est compacte dans E.

2 - Montrer que tout partie finie de E est compacte dans E.

3- Montrer que tout espace vectoriel normé et compact est un Banach.

4- Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E qui converge vers $l \in E$; la partie

$$K = \{u_n \ / \ n \geq 1\} \cup \{l\} \text{ est compacte dans } E.$$

5- Montrer que toute partie compacte de E est nécessairement fermée et bornée dans E.

6- En déduire que l'espace vectoriel normé $\mathbb{K}^n$ n'est pas compact.

7 - Montrer que les seules parties compacts de $\mathbb{K}^n$ sont les parties à la fois fermées et bornées.

8- Montrer que les seules parties relativement compactes de $\mathbb{K}^n$ sont les parties bornées.